SESSION DE 1974

Concours A

MATHÉMATIQUES (1re épreuve)

DURÉE : 4 heures. — COEFFICIENT : 4

Matériel à prévoir : *règle à calculer ; tables numériques usuelles.*

Les cinq exercices proposés sont indépendants.

Les candidats sont priés de séparer nettement les différents exercices et d'encadrer les résultats demandés.

Il sera tenu compte de la simplicité des solutions, de la clarté de la rédaction, et de la présentation.

I

On désigne par f une fonction réelle des deux variables réelles indépendantes u et v, admettant des dérivées partielles du second ordre continues.

$$f : (u, v) \longmapsto f(u, v)$$

On pose $f(0, 0) = a$ $f'_u(0, 0) = b$ $f'_v(0, 0) = c$

1° On désigne par U une fonction réelle, deux fois dérivable d'une variable réelle x.

a. Calculer la valeur F'(x) de la dérivée de la fonction F définie par la relation : $F(x) = f(x, U(x))$.

b. On suppose que la fonction U satisfait à la condition

$$U'(x) = f(x, U(x)) ,$$

et que $U(0) = 0$.

Écrire, à l'aide de a, b, c, le développement limité à l'ordre 2 de la fonction U au voisinage de zéro.

2° On désigne par V la fonction réelle de la variable x définie par la relation :

$$V(x) = A \cdot x \cdot f\left(\frac{x}{2}, Bx\right)$$

où A et B sont des constantes réelles.

Calculer V'(x), V''(x).

Écrire à l'aide de a, b, c, le développement limité à l'ordre 2 de la fonction V au voisinage de zéro.

3° Comment choisir les nombres réels A et B pour que la fonction $W(x) = U(x) - V(x)$ soit un infiniment petit d'ordre supérieur à 2?

II

Le plan est rapporté à un repère orthonormé Oxy. On donne le point fixe A (a, a), $a > 0$.

1° On considère un cercle passant par les points O et A.

En désignant par t l'abscisse de son centre (γ), former l'équation cartésienne de ce cercle désigné par (Γ).

2° Un cercle (Γ) coupe la droite Ox en O et en un second point K. Former l'équation cartésienne de la tangente (D) en K au cercle (Γ).

3° Déterminer, en fonction de t, les coordonnées de la projection orthogonale H du point A sur la droite (D).

Former, entre ces coordonnées, une relation indépendante de t.

4° Lorsque le paramètre t varie, déterminer l'enveloppe (E) de la droite (D). On précisera la nature de (E). Construire (E).

III

Dans un repère orthonormé direct $Oxyz$, on donne le point A $(a, 0, 0)$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de composantes $(0, a, a)$.

On désigne par a une constante non nulle positive.

On considère le champ vectoriel $\vec{U}(M) = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB}$.

On définit le point P par la relation $\overrightarrow{MP} = \vec{U}(M)$.

1° Déterminer l'ensemble $(\mathcal{A})$ des points M pour lesquels la droite MP passe par l'origine O. Construire la projection orthogonale de $(\mathcal{A})$ sur le plan xOy.

Préciser la nature de $(\mathcal{A})$.

2° Lorsque le point M décrit l'ensemble $(\mathcal{A})$, le point P décrit un ensemble $(\mathcal{B})$. Déterminer l'équation cartésienne de la projection orthogonale de $(\mathcal{B})$ sur le plan xOy.

IV

On considère la fonction f, impaire, de la variable x définie par les relations :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 & f(x) = 0 \\ 1 < x & f(x) = 1 \end{cases}$$

On considère la fonction g de la variable réelle t définie par la relation $g(t) = f(K.\sin t)$, où K est un réel positif non nul.

On considère la fonction h de la variable K définie par la relation

$$h(K) = \frac{1}{K} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} g(t).\sin t.dt$$

1° Préciser, suivant les valeurs de K, la représentation graphique de g.

2° Donner, suivant les valeurs de K, l'expression de h (K), de h'(K), de h''(K).

Représenter graphiquement la fonction h. On précisera les points remarquables et les tangentes en ces points.

V

1° On recherche des fonctions f, réelles, d'une variable réelle x, deux fois dérivables sur les intervalles : $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$, $]1, +\infty[$ et vérifiant les conditions $(\mathcal{C}_1)$ suivantes :

$$(\mathcal{C}_1)\quad \begin{cases} f''(x) - f(x) = 0 \text{ pour } x < -1 \text{ et } \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \\ f''(x) + \omega^2 f(x) = 0 \text{ pour } -1 < x < 1, \\ \quad \omega \text{ étant un paramètre positif non nul;} \\ f''(x) - f(x) = 0 \text{ pour } x > 1 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0. \end{cases}$$

Exprimer f à l'aide de fonctions élémentaires, sur chacun des intervalles précédents.

2° On impose de plus à f la condition $(\mathcal{C}_2)$ suivante :

$(\mathcal{C}_2)$ f est continue et dérivable sur $]-\infty, +\infty[$.

a. **Montrer que pour qu'il existe une fonction f, ne s'annulant identiquement sur aucun intervalle et vérifiant $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$, il faut et il suffit que ω soit solution de l'équation :**

$$(1 - \omega \operatorname{tg} \omega)(\omega + \operatorname{tg} \omega) = 0$$

b. **Combien cette équation a-t-elle de solutions comprises entre 0 et π? Déterminer ces valeurs à 10^{-1} près.**

c. Donner l'expression de la fonction f correspondant à la plus petite valeur de ω déterminée ci-dessus et telle que $f(1) = 1$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail